三角関数の加法定理のいろいろな証明方法

池内（いけうち）　仁史（ひとし）

§1. はじめに

三角関数の加法定理の証明は，数学IIの教科書の多くで，まず

$\cos(\alpha \pm \beta)=\cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

の等式が余弦定理や2点間の距離公式を用いて証明され，これから残りの等式や，これから派生してくる2倍角，3倍角，半角，積→和，和→積公式を順次示していく方法が取られている。

ここでは，高校数学範囲で理解できる加法定理の証明のいくつかを考えてみたい。

[参考]　1999年東京大学前期入試（文理共通）に次のような問題が出題された。

> (1)　一般角 θ に対して $\sin\theta$，$\cos\theta$ の定義を述べよ。
>
> (2)　(1)で述べた定義にもとづき，一般角 α，β に対して，
>
> $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$
>
> $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$
>
> を証明せよ。

教科書に載っている定義・定理の証明が難関大学の入試に直接出題されたことに驚かされるが，これを完答できた受験生は多くなかったと言われている。公式を使うことばかりに目が奪われがちな受験数学に警鐘を鳴らした意味でも良問であったと思う。

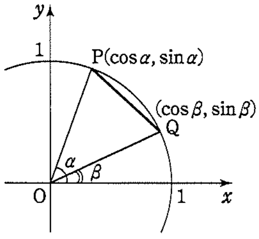
§2. 単位円を利用する証明

[証明1]　右図のように，単位円周上に2点

$P(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$，

$Q(\cos\beta,\ \sin\beta)$

をとると，2点間の距離公式から



$$PQ^2=(\cos\beta-\cos\alpha)^2+(\sin\beta-\sin\alpha)^2$$
$$=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)+(\sin^2\beta+\cos^2\beta)$$
$$-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)$$
$$=2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)\ \cdots①$$

一方，$\triangle POQ$ に余弦定理を用いて

$$PQ^2=OP^2+OQ^2-2\cdot OP\cdot OQ\cdot\cos\angle POQ$$
$$=1^2+1^2-2\cdot1\cdot1\cdot\cos(\alpha-\beta)$$
$$=2-2\cos(\alpha-\beta)\ \cdots②$$

①，②から

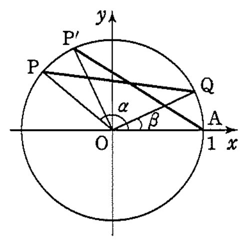
$$2-2\cos(\alpha-\beta)$$
$$=2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)$$

$\therefore\ \ \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$　■

[証明2]　右図のように単位円周上に点 $A(1,\ 0)$ と異なる2点

$P(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$，

$Q(\cos\beta,\ \sin\beta)$



をとり，扇形 OPQ を点Qが点Aと重なるように原点のまわりに $-\beta$ だけ回転したとき，点Pが点P′に移ったとすると

$P'(\cos(\alpha-\beta),\ \sin(\alpha-\beta))$

である。このとき，$PQ=P'A$ であるから

$PQ^2=P'A^2$

したがって

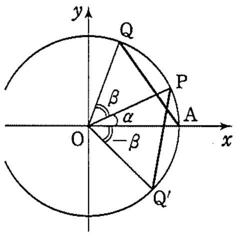
$$(\cos\beta-\cos\alpha)^2+(\sin\beta-\sin\alpha)^2$$
$$=\{1-\cos(\alpha-\beta)\}^2+\{0-\sin(\alpha-\beta)\}^2$$

展開して整理すると

$$(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)+(\sin^2\beta+\cos^2\beta)$$
$$-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)$$
$$=1-2\cos(\alpha-\beta)$$
$$+\{\sin^2(\alpha-\beta)+\cos^2(\alpha-\beta)\}$$
$$2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)$$
$$=2-2\cos(\alpha-\beta)$$

$\therefore\ \ \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$　■

[証明 3]　右図のように単位円周上に 4 点 $A(1,\ 0)$, $P(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$, $Q(\cos(\alpha+\beta),\ \sin(\alpha+\beta))$,



$Q'(\cos(-\beta),\ \sin(-\beta))$
$=(\cos\beta,\ -\sin\beta)$
をとると,

$AQ=PQ'$

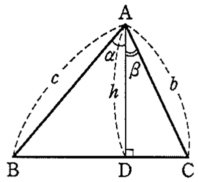
により $AQ^2=PQ'^2$ であるから

$$\{\cos(\alpha+\beta)-1\}^2+\{\sin(\alpha+\beta)-0\}^2$$
$$=(\cos\beta-\cos\alpha)^2+(-\sin\beta-\sin\alpha)^2$$
$$2-2\cos(\alpha+\beta)$$
$$=2-2(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)$$
$$\therefore\quad \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$ ■

§3. 図形を利用する証明

三角形や四角形を利用した証明は，α, β に一般性がなくなるが，三角比のちょうどよい復習になる。

[証明 4]　右図のような△ABC において，頂点Aから辺BC に下した垂線の足をDとし，$\angle BAD=\alpha$, $\angle CAD=\beta$, △ABC の面積を S, $AC=b$, $AB=c$, $AD=h$ とすると



$$S=\frac{1}{2}bc\sin(\alpha+\beta)\ \cdots\cdots①$$

また

$$S=\triangle BAD+\triangle CAD$$
$$=\frac{1}{2}ch\sin\alpha+\frac{1}{2}bh\sin\beta\ \cdots\cdots②$$

ここで，$\cos\alpha=\dfrac{h}{c}$, $\cos\beta=\dfrac{h}{b}$ から

$$h=c\cos\alpha=b\cos\beta$$

これを②に代入して

$$S=\frac{1}{2}c\cdot b\cos\beta\cdot\sin\alpha+\frac{1}{2}b\cdot c\cos\alpha\cdot\sin\beta$$
$$=\frac{1}{2}bc(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)\ \cdots\cdots③$$

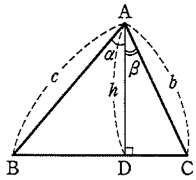
①, ③から

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$ ■

[証明 5]　次図の△ABC において，余弦定理から

$$BC^2=b^2+c^2-2bc\cos(\alpha+\beta)\ \cdots\cdots①$$

ここで，



$BD=h\tan\alpha$,
$CD=h\tan\beta$

$b=\dfrac{h}{\cos\beta}$, $c=\dfrac{h}{\cos\alpha}$

であるから，これらを①式に代入すると

$$(h\tan\alpha+h\tan\beta)^2=\left(\frac{h}{\cos\beta}\right)^2+\left(\frac{h}{\cos\alpha}\right)^2$$
$$-2\cdot\frac{h}{\cos\beta}\cdot\frac{h}{\cos\alpha}\cdot\cos(\alpha+\beta)$$

展開して両辺を h^2 で割ると

$$\tan^2\alpha+2\tan\alpha\tan\beta+\tan^2\beta$$
$$=\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{1}{\cos^2\beta}-\frac{2\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

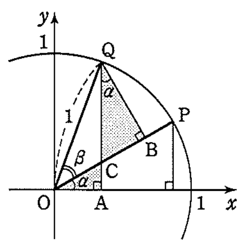
$\tan^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}-1$, $\tan^2\beta=\dfrac{1}{\cos^2\beta}-1$ から

$$\frac{1}{\cos^2\alpha}-1+2\tan\alpha\tan\beta+\frac{1}{\cos^2\beta}-1$$
$$=\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{1}{\cos^2\beta}-\frac{2\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$
$$2\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\sin\beta}{\cos\beta}-2=-\frac{2\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

分母を払って

$$2\sin\alpha\sin\beta-2\cos\alpha\cos\beta=-2\cos(\alpha+\beta)$$
$$\therefore\quad \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$ ■

[証明 6]　右図のように第 1 象限内の単位円周上に 2 点 $P(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$, $Q(\cos(\alpha+\beta),\ \sin(\alpha+\beta))$ をとり，点Qから x 軸および線分 OP に下した垂線の足をそれぞれ A, B とし，AQ と OP の交点をCとする。



直角三角形 OQB において

$QB=\sin\beta$, $OB=\cos\beta$

$\triangle QCB\backsim\triangle OCA$ により

$\angle CQB=\angle COA=\alpha$

であるから

$$OC=OB-CB$$
$$=OB-QB\tan\alpha=\cos\beta-\sin\beta\tan\alpha$$

したがって

$$OA=OC\cos\alpha=(\cos\beta-\sin\beta\tan\alpha)\cos\alpha$$
$$=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\ \cdots\cdots①$$

一方，$\dfrac{QB}{QC}=\cos\alpha$ により $QC=\dfrac{QB}{\cos\alpha}$ であるから

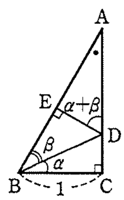
$$QA=QC+CA=\frac{QB}{\cos\alpha}+OC\sin\alpha$$
$$=\frac{\sin\beta}{\cos\alpha}+(\cos\beta-\sin\beta\tan\alpha)\sin\alpha$$
$$=\frac{\sin\beta}{\cos\alpha}+\sin\alpha\cos\beta-\frac{\sin\beta\sin^2\alpha}{\cos\alpha}$$
$$=\sin\alpha\cos\beta+\frac{(1-\sin^2\alpha)\sin\beta}{\cos\alpha}$$
$$=\sin\alpha\cos\beta+\frac{\cos^2\alpha\sin\beta}{\cos\alpha}$$
$$=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \quad\cdots\cdots②$$

①，②から

$$OA=\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \quad ■$$
$$QA=\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \quad ■$$

［証明７］ 右図のように，$\angle C=90°$，$BC=1$ の直角三角形 ABC において，辺 AC 上に任意の点Dをとり，

$\angle DBC=\alpha$，$\angle ABD=\beta$



とおき，点Dから辺 AB に下した垂線の足をEとすると，

$\triangle ABC\backsim\triangle ADE$ により

$\angle ADE=\angle ABC=\alpha+\beta$

$AD:DE=AB:BC$ から　$AD\cdot BC=AB\cdot DE$

$BC=1$ により　　$AD=AB\cdot DE \quad\cdots\cdots①$

ここで，

$$AD=AC-DC=\tan(\alpha+\beta)-\tan\alpha \quad\cdots\cdots②$$

また，$\dfrac{BC}{BD}=\cos\alpha$ から $BD=\dfrac{BC}{\cos\alpha}=\dfrac{1}{\cos\alpha}$

したがって，直角三角形 BDE において

$$ED=BD\sin\beta$$
$$=\frac{1}{\cos\alpha}\cdot\sin\beta=\frac{\sin\beta}{\cos\alpha} \quad\cdots\cdots③$$
$$EB=BD\cos\beta=\frac{1}{\cos\alpha}\cdot\cos\beta=\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$$

さらに，$\triangle AED$ において

$$AE=ED\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin\beta}{\cos\alpha}\tan(\alpha+\beta)$$

$\therefore$　$AB=AE+EB$

$$=\frac{\sin\beta}{\cos\alpha}\tan(\alpha+\beta)+\frac{\cos\beta}{\cos\alpha} \quad\cdots\cdots④$$

②，③，④を①に代入して

$$\tan(\alpha+\beta)-\tan\alpha$$
$$=\left\{\frac{\sin\beta}{\cos\alpha}\tan(\alpha+\beta)+\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}\right\}\times\frac{\sin\beta}{\cos\alpha}$$
$$=\frac{\sin^2\beta}{\cos^2\alpha}\tan(\alpha+\beta)+\frac{\sin\beta\cos\beta}{\cos^2\alpha}$$
$$\left(1-\frac{\sin^2\beta}{\cos^2\alpha}\right)\tan(\alpha+\beta)$$
$$=\tan\alpha+\frac{\sin\beta\cos\beta}{\cos^2\alpha} \quad\cdots\cdots⑤$$

ここで，$\tan\alpha=x$，$\tan\beta=y$ とおくと

$$\sin^2\beta=1-\cos^2\beta=1-\frac{1}{1+\tan^2\beta}$$
$$=1-\frac{1}{1+y^2}=\frac{y^2}{1+y^2}$$
$$\frac{1}{\cos^2\alpha}=1+\tan^2\alpha=1+x^2$$
$$\sin\beta\cos\beta=\cos^2\beta\times\frac{\sin\beta}{\cos\beta}$$
$$=\cos^2\beta\tan\beta=\frac{\tan\beta}{1+\tan^2\beta}$$
$$=\frac{y}{1+y^2}$$

これらを⑤に代入して

$$\left\{1-\frac{y^2}{1+y^2}\times(1+x^2)\right\}\tan(\alpha+\beta)$$
$$=x+\frac{y}{1+y^2}\times(1+x^2)$$
$$\frac{1+y^2-y^2(1+x^2)}{1+y^2}\times\tan(\alpha+\beta)$$
$$=\frac{x(1+y^2)+y(1+x^2)}{1+y^2}$$
$$(1-x^2y^2)\tan(\alpha+\beta)=x+y+xy(x+y)$$
$$(1+xy)(1-xy)\tan(\alpha+\beta)=(x+y)(1+xy)$$
$$\therefore\quad \tan(\alpha+\beta)=\frac{x+y}{1-xy}=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} \quad ■$$

［発展］ ⑤式から正接の加法定理の面白い結果が得られる。

$$\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\beta}{\cos^2\alpha}\times\tan(\alpha+\beta)$$
$$=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta\cos\beta}{\cos^2\alpha}$$
$$=\frac{\sin\alpha\cos\alpha+\sin\beta\cos\beta}{\cos^2\alpha}$$

から

$$\boxed{\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin\alpha\cos\alpha+\sin\beta\cos\beta}{\cos^2\alpha-\sin^2\beta}}$$

この式はあまり教科書や参考書でお目にかかったことがない等式で，**証明7**で示した方法（非常に繁雑）以外の証明を少し考えてみよう。

方法1． 右辺の分母・分子を $\cos^2\alpha\cos^2\beta$ で割ると

$$(\text{右辺})=\frac{\tan\alpha\cdot\dfrac{1}{\cos^2\beta}+\dfrac{1}{\cos^2\alpha}\cdot\tan\beta}{\dfrac{1}{\cos^2\beta}-\dfrac{1}{\cos^2\alpha}\cdot\tan^2\beta}$$

$$=\frac{\tan\alpha(1+\tan^2\beta)+(1+\tan^2\alpha)\tan\beta}{1+\tan^2\beta-(1+\tan^2\alpha)\tan^2\beta}$$

$$=\frac{\tan\alpha+\tan\beta+\tan\alpha\tan\beta(\tan\alpha+\tan\beta)}{1-\tan^2\alpha\tan^2\beta}$$

$$=\frac{(\tan\alpha+\tan\beta)(1+\tan\alpha\tan\beta)}{(1+\tan\alpha\tan\beta)(1-\tan\alpha\tan\beta)}$$

$$=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}\qquad\blacksquare$$

方法2． 右辺に2倍角・半角・和→積公式を用いて

$$(\text{右辺})=\frac{\sin\alpha\cos\alpha+\sin\beta\cos\beta}{\cos^2\alpha-(1-\cos^2\beta)}$$

$$=\frac{\dfrac{1}{2}\sin2\alpha+\dfrac{1}{2}\sin2\beta}{\dfrac{1+\cos2\alpha}{2}-1+\dfrac{1+\cos2\beta}{2}}$$

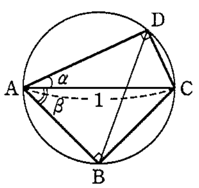
$$=\frac{\sin2\alpha+\sin2\beta}{\cos2\alpha+\cos2\beta}$$

$$=\frac{2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}{2\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}$$

$$=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$$

$$=\tan(\alpha+\beta)\qquad\blacksquare$$

［証明8］ 次図のように直径の長さが1の円に内接し，対角線ACが円の直径であるような四角形ABCDを考え，$\angle\mathrm{DAC}=\alpha$，$\angle\mathrm{BAC}=\beta$ とすると，$\angle\mathrm{B}=\angle\mathrm{D}=90^\circ$ であることから



$\mathrm{AD}=\mathrm{AC}\cos\alpha=\cos\alpha$

$\mathrm{CD}=\mathrm{AC}\sin\alpha=\sin\alpha$

同様に

$\mathrm{AB}=\cos\beta$，$\mathrm{BC}=\sin\beta$

また，△ABDにおいて正弦定理から

$$\frac{\mathrm{BD}}{\sin(\alpha+\beta)}=1$$

$\therefore\ \mathrm{BD}=\sin(\alpha+\beta)$

これらをトレミーの定理

$\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CD}+\mathrm{BC}\cdot\mathrm{AD}=\mathrm{BD}\cdot\mathrm{AC}$

に代入して

$\cos\beta\sin\alpha+\sin\beta\cos\alpha=\sin(\alpha+\beta)\cdot1$

$\therefore\ \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\qquad\blacksquare$

［参考証明］ 高校数学の範囲外である「オイラーの公式：$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$」を利用した証明もある。

オイラーの公式より

$e^{i(\alpha+\beta)}=\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)$ ……①

一方，

$$\begin{aligned}e^{i(\alpha+\beta)}&=e^{i\alpha}e^{i\beta}\\&=(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta+i\sin\beta)\\&=\cos\alpha\cos\beta+i(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)\\&\qquad+i^2\sin\alpha\sin\beta\\&=(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)\\&\qquad+i(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)\ \cdots\cdots②\end{aligned}$$

①，②の実部と虚部を比較して

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\qquad\blacksquare$

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\qquad\blacksquare$

§4．おわりに

その他，加法定理の証明として，ド・モアブルの定理：$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$

や回転の1次変換行列：

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

を利用する証明法も考えられるが，この定理や性質を証明するのに加法定理を利用しているので，循環的証明になってしまうから不適当である。

数学IIの三角関数で加法定理の証明を扱うときに，教科書の証明と同時に他の証明法（特に§3の図形を利用した証明法のいずれか）を紹介すると，生徒の理解が一層深まるので参考にしていただければ幸いである。

《参考文献》

〔1〕 http://d.hatena.ne.jp/gould2007/20070806

〔2〕 http://takeno.iee.niit.ac.jp~shige/math/lecture/basic1/data/sinadd.pdf

（埼玉県立春日部高等学校）