三角関数の加法定理

2014年11月22日（土）
JABEE-日工教 共催
反転授業に関するワークショップ用サンプル

このスライド集について

- このスライド集は，**2014**年**11**月**22**日（土）に**JABEE**と日工教が共催する「反転授業に関するワークショップ」において，反転授業の実例をご紹介するための模擬講義用資料です．
- 工学系の多くの教員の皆様に共通の題材として，「三角関数の加法定理の導出」を取り上げていますが，反転授業の適用範囲は数学等に限られるものではありません．

よく使う三角関数公式

$$\boxed{\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta)&=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\\ \cos(\alpha-\beta)&=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\\ \sin(\alpha+\beta)&=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha\\ \sin(\alpha-\beta)&=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha\end{aligned}}$$

加法定理

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}$$

$$\sin^2\gamma=\frac{1-\cos 2\gamma}{2}$$

$$\cos^2\gamma=\frac{1+\cos 2\gamma}{2}$$

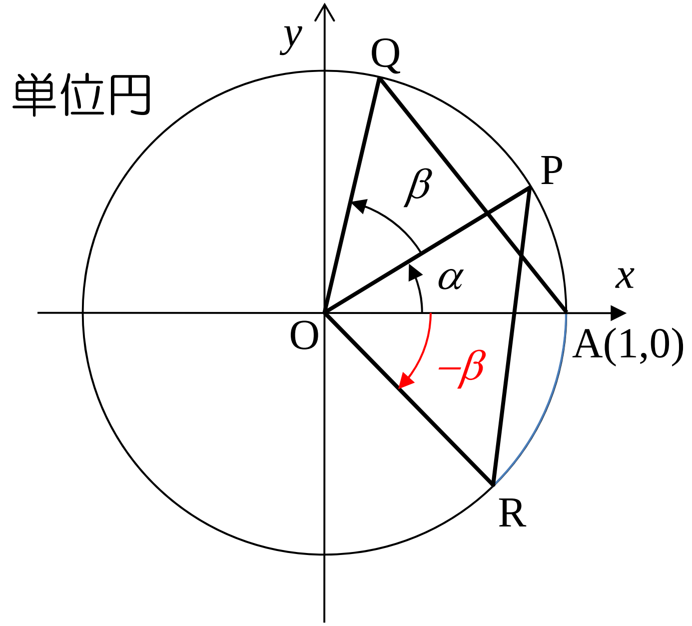
コサインの加法定理の導出

- 二つの角αとβの和$\alpha+\beta$に対するコサインの加法定理を，原点と単位円上の２つの点からなる二等辺三角形△**OAQ**と△**OPR**が合同であることを使って導出しよう。

導出するコサインの加法定理の式

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

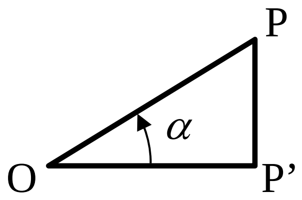
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\alpha$$



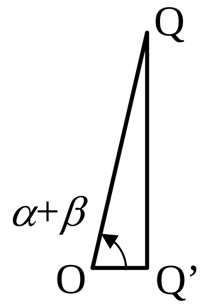
三角形の頂点の座標を求めよう

図中P, Q, Rの各点からx軸に垂線をおろしてできる
３つの直角三角形を考え，各点の座標を求めよう

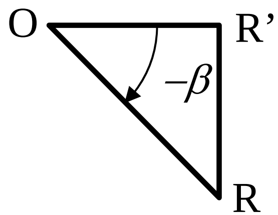
P ：$(\cos\alpha, \sin\alpha)$

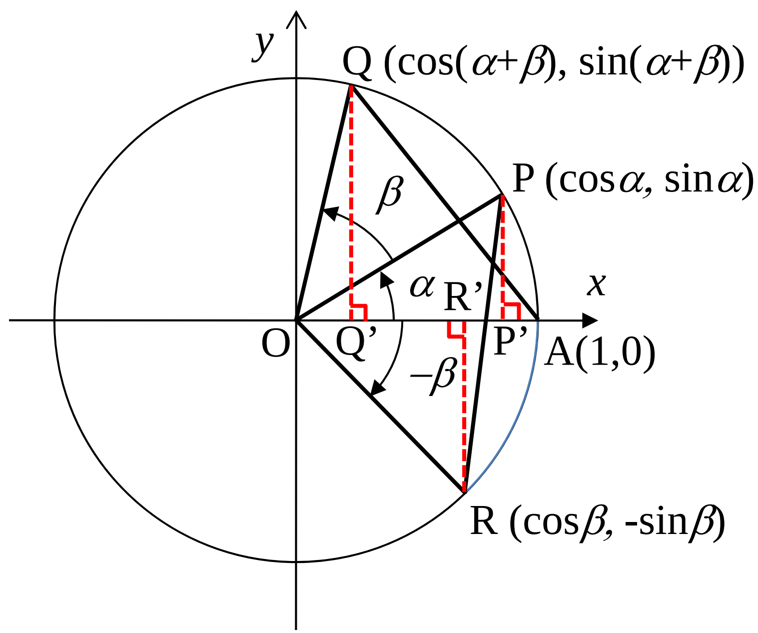


Q : $(\cos(\alpha+\beta), \sin(\alpha+\beta))$



R : $(\cos(-\beta), \sin(-\beta))$
$=(\cos\beta, -\sin\beta)$





三角形の合同を利用しよう

- △**OAQ**と△**OPR**はどちらも長さの等しい二辺の長さが１で頂角$\alpha+\beta$の二等辺三角形であるので、両者の底辺の長さは等しく$\overline{\mathrm{PR}} = \overline{\mathrm{QA}}$，よって$\overline{\mathrm{PR}}^2 = \overline{\mathrm{QA}}^2$
- 先に求めたP,Q,R各点の座標より次式を得る

$$\overline{\mathrm{PR}}^2 = (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha + \sin\beta)^2$$
$$= 2 - 2\cos\alpha\cos\beta + 2\sin\alpha\sin\beta$$

$$\overline{\mathrm{QA}}^2 = (1 - \cos(\alpha+\beta))^2 + \sin^2(\alpha+\beta)$$
$$= 2 - 2\cos(\alpha+\beta)$$

コサインの加法定理の導出が完了

これまでの結果より・・・

$$\overline{\mathrm{PR}}^2 = 2 - 2\cos\alpha\cos\beta + 2\sin\alpha\sin\beta$$

$$\overline{\mathrm{QA}}^2 = 2 - 2\cos(\alpha+\beta)$$

$$\overline{\mathrm{PR}}^2 = \overline{\mathrm{QA}}^2 \to 2 - 2\cos\alpha\cos\beta + 2\sin\alpha\sin\beta = 2 - 2\cos(\alpha+\beta)$$

$$\therefore \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

上の結果を用いてもう一つの関係式も導出される

$$\begin{aligned} \cos(\alpha-\beta) &= \cos(\alpha+(-\beta)) = \cos\alpha\cos(-\beta) - \sin\alpha\sin(-\beta) \\ &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \\ &\because \cos(-\beta) = \cos\beta, \sin(-\beta) = -\sin\beta \end{aligned}$$

演習：サインの加法定理を導出しよう

導出するサインの加法定理の式

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha$$

全て説明してしまうのではなく，部分的に課題として提供すると，意欲の高い学生の理解が進みます

導出したコサインの加法定理と次の関係式を用いて，上のサインの加法定理を導出しよう

$$\sin\theta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$